I) Techniques de première année

A) Calcul matriciel

A.1 Produit matriciel

Exercice 1: ★ *t.20.1*

Calculer les produits suivants :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \varepsilon P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 8 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & 7 \\ 1 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_6 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 7 & 1 \\ -2 & 5 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_7 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 9 & 3 & -8 \\ 2 & 1 & 9 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_8 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 9 & 3 & -8 \\ 2 & 1 & 9 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_9 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & -7 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{10} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

A.2 Calcul d'inverses, systèmes linéaires, déterminants

Exercice 2: ★ *t.20.10*

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse ?

1.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_{10} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

3.

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

4.

$$A_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

5.

$$A_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_{17} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3: ★ *t.20.25*

Déterminer l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants :

1. $\begin{cases} x - y + 3z &= 1 \\ 2x - 2y + z &= 3 \\ 2x - y - z &= 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + 2z - 5t &= 1 \\ x - 2y + t &= 0 \\ 2x - z - t &= 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y &= 1 \\ 2x + y &= 2 \\ 3x + 4y &= 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y &= 1 \\ 2x + y &= 2 \\ 3x + 4y &= 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + 2y + z + 2t + 3u &= 2 \\ x + 3y + z + 2t &= 1 \\ y - 3u &= -1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + 2y + z + 2t + 3u &= 2 \\ x + 3y + z + 2t &= 1 \\ y - 3u &= 0 \end{cases}$

Exercice 4: ★★ *t.26.2*

Calculer les déterminants suivants. On cherchera des expressions aussi factorisées que possible.

1. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ bcd & acd & abd & abc \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & a & b & ac \\ 1 & b & c & bd \\ 1 & c & d & ac \\ 1 & d & a & bd \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$

A.3 Calcul de rang

Exercice 5: ★ *t.24.43*

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

B) Espaces vectoriels

Exercice 6: ★ *t.23.2*

Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

1. Le sous-ensemble des fonctions positives.
2. Le sous-ensemble des fonctions s'annulant en 1.
3. Le sous-ensemble des fonctions tendant vers $+\infty$ en $+\infty$.
4. Le sous-ensemble des fonctions admettant une limite finie en $+\infty$.
5. Le sous-ensemble des fonctions périodiques dont T est une période.
6. Le sous-ensemble de toutes les fonctions périodiques (quelle que soit la période).
7. Le sous-ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, mais pas $\mathcal{C}^{n+1}$.

Exercice 7: ★ *t.23.5*

Pour chacune des familles suivantes de $\mathbb{R}^3$, dire si elles sont libres, génératrices ; lesquelles sont des bases ?

1. $((1, -3, 2), (2, 1, 0))$
2. $((1, 5, 6), (2, 3, 0), (3, 8, 6), (1, 0, 0))$
3. $((2, 2, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 1))$
4. $((1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5))$
5. $((1, 2, 0), (0, 1, 1), (2, 0, 1))$

Exercice 8: ★ *t.23.12*

Soit, dans $\mathbb{R}^3$, les quatre vecteurs suivants :

$$v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (1, 2, 4), v_3 = (3, -1, a), v_4 = (2, 3, b)$$

Déterminer a et b tels que $\text{Vect}(v_1, v_2) = \text{Vect}(v_3, v_4)$.

Exercice 9: ★ *t.24.42*

Déterminer les images et noyaux des endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ ($n = 2$ ou 3) canoniquement associés aux matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Exercice 10: ★ *t.24.31*

Montrer que les applications f ci-dessus sont des applications linéaires de E dans F, et donner leur matrice relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E et de F.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + 2y, 3x - 3y)$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - 2y, y + z, z - x)$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
3. $E = F = \mathbb{R}_n[X]$, $f = \text{id}$, $\mathcal{B} = (1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$, $\mathcal{C} =$ b.c.
4. $E = F = \mathbb{R}_n[X]$, $f = \text{id}$, $\mathcal{B} =$ b.c., $\mathcal{C} = (1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$
5. $E = F = \mathbb{R}_n[X]$, $f = \text{id}$, $\mathcal{B} =$ b.c., $\mathcal{C} = (1, 1 + X, 1 + X + X^2, \dots, 1 + X + X^2 + \cdots + X^n)$.
6. $E = F = \text{Vect}(\cos, x \mapsto x \cos x, \sin, x \mapsto x \sin x)$, $f(g) = g'$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = (\cos, x \mapsto x \cos x, \sin, x \mapsto x \sin x)$
7. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $F = \mathbb{R}_1[X]$, $f(P) = R$, reste de la division de P par $X^2 - 3X + 2$, $\mathcal{B} =$ b.c., $\mathcal{C} =$ b.c.

Exercice 11: ★ *t.24.36*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même ($n = 2$ ou 3) associé à la matrice A ci-dessous, relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Exprimer la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$, en se servant de la formule de changement de base.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} =$ b.c., $\mathcal{B}' = \mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} =$ b.c., $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} =$ b.c., $\mathcal{B}' = \mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}' =$ b.c.

Exercice 12: ★ *t.24.41*

Déterminer les $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tels que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

II) Sommes directes

Exercice 13: ★ *d.101.3*

Pour $d \in \mathbb{N}$, notons H_d l'ensemble formé des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ homogènes de degré d c'est-à-dire pouvant s'écrire comme combinaison linéaire de fonctions monômes de degré d.
Montrer que $(H_d)_{0 \leqslant d \leqslant n}$ est une famille de sous-espaces vectoriels en somme directe.

Exercice 14: ★ *d.101.4, t.23.14*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $E_1, \dots, E_n$, $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces de E tels que :

$$\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i \text{ et } \forall i \in [\![1\,,n]\!]\,, E_i \subseteq F_i$$

Montrer que pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]\,, E_i = F_i$

Exercice 15: ★★ *d.101.6*

Dans l'espace E des fonctions continues de $[-1;1]$ vers $\mathbb{R}$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F_1 = \{f \in E \mid f \text{ est constante}\}, \quad F_2 = \{f \in E \mid \forall t \in [-1;0],\ f(t) = 0\} \text{ et}$$

$$F_3 = \{f \in E \mid \forall t \in [0;1],\ f(t) = 0\}.$$

Établir

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3.$$

Exercice 16: ★★ *d.101.9*

Soient $p_1, \ldots, p_n$ des endormophismes d'un espace vectoriel E vérifiant :

$$p_1 + \cdots + p_n = Id_E \text{ et } \forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, p_i \circ p_j = 0$$

Montrer que les endomorphismes $p_1, \ldots, p_n$ sont les projecteurs associés à une décomposition en somme directe de E.

Exercice 17: ★★ *t.23.15*

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, et $V(E)$ l'ensemble des sev de E. Pour $V \in V(E)$, on note :

$$\varphi_V : \begin{cases} V(E) & \longrightarrow & V(E) \\ X & \longmapsto & X \cap V \end{cases}$$

$$\psi_V : \begin{cases} V(E) & \longrightarrow & V(E) \\ X & \longmapsto & X + V \end{cases}$$

Montrer que :

1. φ_V injective *si et seulement si* φ_V surjective *si et seulement si* $V = E$.
2. ψ_V injective *si et seulement si* ψ_V surjective *si et seulement si* $V = \{0\}$.

III) Noyaux, images, rangs, liberté

Exercice 18: ★ *d.101.21*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & O_{n,p} \\ O_{p,n} & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$$

Etablir que $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.

Exercice 19: ★ *t.24.26*

Soit E un espace de dimension 3, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$. Montrer que le rang de f est 1.

Exercice 20: ★ *t.24.9*

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

1. Montrer que $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v = \operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u \circ v)$.
2. Que peut-on dire de $\operatorname{Im} v + \operatorname{Ker} u$?

Exercice 21: ★ *t.24.10*

Soit $E_0, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, de dimension finie, et pour tout $i \in [\![1\,, n]\!]$, soit $f_i : E_{i-1} \longrightarrow E_i$ une application linéaire. On suppose que :

$$\{0\} \longrightarrow E_0 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_n} E_n \longrightarrow \{0\}$$

est *exacte*, ce qui signifie que f_1 est injective, f_n est surjective, et pour tout $i \in [\![1\,, n-1]\!]$, $\operatorname{Im} f_i = \operatorname{Ker} f_{i+1}$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim E_k = 0$$

Exercice 22: ★ *h.4.10*

Trouver un endomorphisme f tel que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.

Exercice 23: ★★ *h.4.11, h.4.12*

Trouver un endomorphisme f qui est injectif mais pas surjectif, puis un endomorphisme surjectif qui n'est pas injectif.

Exercice 24: ★★ *d.101.25*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Exprimer le rang de la matrice M décrite par blocs $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$.
2. Calculer l'inverse de M lorsque cela est possible.

Exercice 25: ★★ *d.101.30*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Justifier qu'il existe $U, V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que

$$\mathrm{rg}(UA + BV) = \min(n, \mathrm{rg}\, A + \mathrm{rg}\, B)$$

2. On suppose $\mathrm{rg}\, A + \mathrm{rg}\, B \geqslant n$. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que

$$UA + BV \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

Exercice 26: ★★ *b.6.33*

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x-a| \end{array} \right.$. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 27: ★★ *b.6.2*

1. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$ vérifiant $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, v$.
2. Quelle relation peut-on en déduire entre les rangs de u et v ?
3. Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$, E_1 tel que $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus E_1$ et F_1 tel que $F = \mathrm{Im}\, u \oplus F_1$. Montrer qu'il existe une unique $v \in \mathcal{L}(F,E)$, de noyau F_1 et d'image E_1, telle que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

Exercice 28: ★★ *t.24.12*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et f, g dans $\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
2. On suppose que $f \circ g = 0$ et que $f + g$ est un automorphisme. Montrer que $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g = \dim E$.

Exercice 29: ★★★ *t.24.3*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(X_i)_{i\in[\![1\,,n+1]\!]}$ une famille de parties non vides de $[\![1\,,n]\!]$. Montrer qu'il existe deux sous-ensembles disjoints I et J non-vides de $[\![1\,,n+1]\!]$ tels que

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{j\in J} X_j$$

Exercice 30: ★★★ *b.6.4*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que $u \in \mathrm{GL}(E)$ est un échangeur s'il existe des sous-espaces vectoriels F, G tels que $E = F \oplus G$, $u(F) \subseteq G$ et $u(G) \subseteq F$. Montrer que u est un échangeur *si et seulement si* il existe des endomorphismes a et b tels que $u = a + b$ avec $a^2 = b^2 = 0$.

Exercice 31: ⋆⋆⋆ *b.6.9*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur u pour qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ telle que $u + v \in \mathrm{GL}(E)$ et $u \circ v = 0$.

IV) Endormophismes et matrices

A) Généralités

Exercice 32: ⋆ *d.101.34*

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A = O_3$ et $A^2 \neq O_3$.
Etablir que A est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 33: ⋆ *d.101.42*

Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & -2 \\ -1 & -6 & 5 & -2 \\ -1 & -10 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 21 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 34: ⋆ *d.101.44*

Quelles sont les matrices carrées réelles d'ordre n qui commutent avec $\mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n)$ et lui sont semblables ?

Exercice 35: ⋆⋆ *t.23.23*

Lemme de Schur.

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et f un endomorphisme de E. Montrer que si pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ sont colinéaires, alors f est une homothétie.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $u \in \mathcal{L}(E), u \circ f = f \circ u$. Montrer que f est une homothétie (avec l'axiome du choix).

Exercice 36: ★★ *b.6.21, b.6.24*

1. Que dire d'un endomorphisme d'un ev de dimension finie qui stabilise toute droite vectorielle ?
2. Que dire d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui dont la matrice dans toute base est la même ?
3. Que dire d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui commute avec tout projecteur ?

Exercice 37: ★★ *d.101.45*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrirce de rang 1.

1. Montrer que A est semblable à une matrice dont les $n-1$ premières colonnes sont nulles.
2. En déduire $A^2 = (\operatorname{Tr} A)A$ et $\det(I_n + A) = 1 + \operatorname{Tr} A$.

Exercice 38: ★★ *d.101.36*

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non-nulle vérifiant $A^2 = O_3$. Déterminer la dimension de l'espace :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM - MA = O_3\}$$

Exercice 39: ★★ *b.6.26*

Théorème d'Hadamard.
Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall i \in [\![1\,,n]\!]\,, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 40: ★★★ *b.6.30*

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite bistochastique lorsque tous ses coefficients sont positifs et que la somme de ses coefficients sur une ligne ou une colonne quelconque vaut 1. On note $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble formé par ces matrices.

1. Montrer que $D_n(\mathbb{R})$ est convexe.
2. Un élément P de $D_n(\mathbb{R})$ est dit extrémal lorsque : $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \forall t \in]0\,,1[\,, (1-t)A + tB = P \Rightarrow A = B$.
   Montrer que toute matrice de permutation est un élément extrémal de $D_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que tout élément extrémal de $D_n(\mathbb{R})$ est une matrice de permutation.

B) Projecteurs

Exercice 41: ★ *b.6.36*

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, F_0, F_1, G_0 et G_1 des sev de E. Soit f (resp. g) le projecteur de E de noyeau F_0 (resp. G_0) et d'image F_1 (resp. G_1). Supposons que $f \circ g = g \circ f$.

1. Démontrer que $h = f \circ g$ est un projecteur de E et que son image est $F_1 \cap G_1$.
2. Déterminer le noyau de H.

Exercice 42: ★ *t.24.20*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. On se donne n endormophismes non nuls de E, $p_1, \dots, p_n$, tels que pour tout $(i, j) \in [\![1\,, n]\!]^2\,, p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$. Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Im}(p_i)$ sont en somme directe et que pour tout $i \in [\![1\,, n]\!]$, $\mathrm{rg}(p_i) = 1$.

Exercice 43: ★★ *h.4.15*

Trouver un endomorphisme f de E tel que $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$ mais qui n'est pas un projecteur.

Exercice 44: ★★ *b.6.37*

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, soient p et q deux projecteurs définis sur E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur *si et seulement si* $p \circ q + q \circ p = 0$ *si et seulement si* $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Interpréter cette condition en terme de noyaux et d'images de p et q.
3. Montrer que si $r = p + q$ est un projecteur, $\mathrm{Ker}\, r = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$ et $\mathrm{Im}\, r = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$. Montrer que cette somme est directe.
4. On suppose dans cette question que $r = p + q - p \circ q$ et $\mathrm{Im}\, p \subseteq \mathrm{Ker}\, q$, montrer que r est un projecteur dont on déterminera le noyau.

Exercice 45: ★★ *t.23.32*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et g un projecteur de E. Montrer que : $\mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Ker}(g) \oplus (\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, g)$.
2. Soit f un projecteur de E, et $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que : $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f) \cap (\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, g)$.
3. Soit f et g deux projecteurs de E. Montrer que $f \circ g$ est un projecteur *si et seulement si* :

$$\mathrm{Im}(f) \cap (\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(g)) \subseteq \mathrm{Im}(g) \oplus (\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g)$$

Exercice 46: ★★★ *b.6.39*

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A une partie finie de cardinal m de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ stable par produit. Montrer que $\sum_{M \in A} \mathrm{Tr}(M) \in m\mathbb{Z}$.
2. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(g) = 0$. Montrer que $\sum_{g \in G} g = 0$.

C) Nilpotents

Exercice 47: ★ *p.06*

Soit u un endomorphisme nilpotent dans un espace vectoriel de dimension n. Montrer que l'indice de nilpotence de u est inférieur à n.

Exercice 48: ★ *h.4.16*

Trouver un endomorphisme f de E tel que, pour tout vecteur x de E, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p(x) = 0$, mais qui n'est pas nilpotent.

Exercice 49: ★★ *p.07*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soient $u_1, \ldots, u_n$ des endomorphismes nilpotents de E qui commutent deux-à-deux. Que peut-on dire de $u_1 \circ \cdots \circ u_n$?

Exercice 50: ★★★ *b.6.20*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ nilpotente. Montrer que $I_n + M$ a une racine carrée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

V) Systèmes linéaires et déterminant

Exercice 51: ★★ *d.101.52*

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :
$$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} \geqslant 0$$
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.
3. Trouver un contre-exemple à (2) si A et B ne commutent pas.
4. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA$. Montrer que :
$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - CB)$$

Exercice 52: ★★ *b.6.56*

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On veut montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = Q^{-1}AQ$.

1. Ecrivons $P = R + \mathrm{i}S$ avec $(R, S) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $RB = AR$ et $SB = AS$.
2. En déduire que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (R + \lambda S)B = A(R + \lambda S)$. Conclure.

Exercice 53: ★★ *b.6.57*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(M))$ en fonction de $\mathrm{rg}\, M$.
2. Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(B)$. *On pourra commencer par traiter le cas des inversibles.*
3. L'application Com est-elle injective ?
4. Quelle est son image dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Même question sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 54: ★★★ *d.101.59*

Soient A, B, C, D des matrices carrées d'ordre n, réelles et commutant deux-à-deux. Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ est inversible *si et seulement si* $AD - BC$ l'est.

Exercice 55: ★★★ *b.6.47*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ *si et seulement si* $\det A = \pm 1$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Donner une CNS sur a et b pour que $(a, b)^\top$ soit la première colonne d'une matrice de taille 2 à coefficients entiers de déterminant ± 1.
3. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des entiers relatifs premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que $(a_1, \ldots, a_n)^\top$ est la première colonne d'une matrice de taille n à coefficients entiers de déterminant ± 1.
4. Soient $U, V \in \mathbb{Z}^n$. Donner une CNS sur U et V pour qu'il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ dont la première colonne soit U et la deuxième V.

Exercice 56: ★★★ *b.6.53*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. On suppose que les coefficients diagonaux de A sont tous nuls et que les coefficients en dehors de la diagonale sont dans $\{-1, 1\}$. Montrer que A est inversible.

VI) Formes linéaires, hyperplans, trace

Exercice 57: ★ *t.24.53*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ et

$$T : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M - \mathrm{Tr}(M)A \end{array} \right.$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Donner une CNS sur $\mathrm{Tr}\, A$ pour que T soit bijective.
3. Caractériser T lorsque T n'est pas bijective.

Exercice 58: ★★ *b.6.42*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une unique $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(A) = \mathrm{Tr}(AC)$.
2. On suppose que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $f(AB) = f(BA)$. Montrer que $f = \lambda\,\mathrm{Tr}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 59: ★★ *b.6.43*

Soit $n \geqslant 2$ et soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que H contient au moins une matrice inversible.
2. On suppose que H est stable par multiplication. Montrer que $I_n \in H$.

Exercice 60: ★★ *b.6.25*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, (x, u(x))$ est liée. Montrer que u est une homothétie.
2. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ *si et seulement si* A est semblable à une matrice de diagonale nulle.
3. Soit A telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$. En déduire qu'il existe $(B, C) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ telle que $A = BC - CB$.

Exercice 61: ★★ *d.101.71*

Soit n un entier $\geqslant 2$ et $\mathcal{A}$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable pour le produit matriciel.

1. On suppose que $I_n \notin \mathcal{A}$. Montrer, si $M^2 \in \mathcal{A}$, que $M \in \mathcal{A}$. En déduire que pour tout $i \in [\![1\,, n]\!]$ que la matrice $E_{i,i}$ est dans $\mathcal{A}$. En déduire une absurdité.
2. On prend $n = 2$. Montrer que $\mathcal{A}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices triangulaires supérieures.